SKL Styrning och ledning matematik
Ställningstaganden och vetenskaplig bakgrund
Ola Helenius

I den här texten ges en kortfattad översikt till den vetenskapliga bakgrunden till kompetensutvecklingsprojektet som är en bärande del i SKL's och NCM's projekt Styrning och ledning matematik. Utifrån ett professionsperspektiv innehåller denna satsning två komponenter. Den ena är en fortbildningskomponent. Det andra är en undervisningskomponent. De två hänger tätt samman. Fortbildningskomponenten tar sin utgångspunkt i forskning om storskalig kompetensutveckling, både i Sverige och internationellt. Undervisningskomponenten bygger en undervisningsmodell som har sin grund i en stor mängd forskning om effektiv undervisning och i forskning om begreppsbildning inom den grundläggande taluppfattningen.

Kompetensutveckling. Modeller och effekter

De senaste decenniernas forskning om kompetensutveckling för lärare har vanligen landat i att för att få någon förändring i praktiken, bör kompetensutveckling göras tillsammans med kollegor och även med interaktion med den reguljära undervisningspraktiken. Tidigare tänkte man sig en linjär modell där man först gav lärarna någon ny information (undervisning). Denna information skulle påverka lärares kunskaper, uppfattningar och värderingar. Genom dessa förändringar skulle läraren sedan förändra sin undervisning till det bättre och den nya undervisningen skulle göra att eleverna lärde sig mer. Senare modeller för kompetensutveckling har snarare byggt på att extern information, feedback från praktiken, lärarens kunskaper lärares experimenterande i praktiken samverkar på ett mer komplicerat sätt (Clarke & Hollingsworth, 2002).

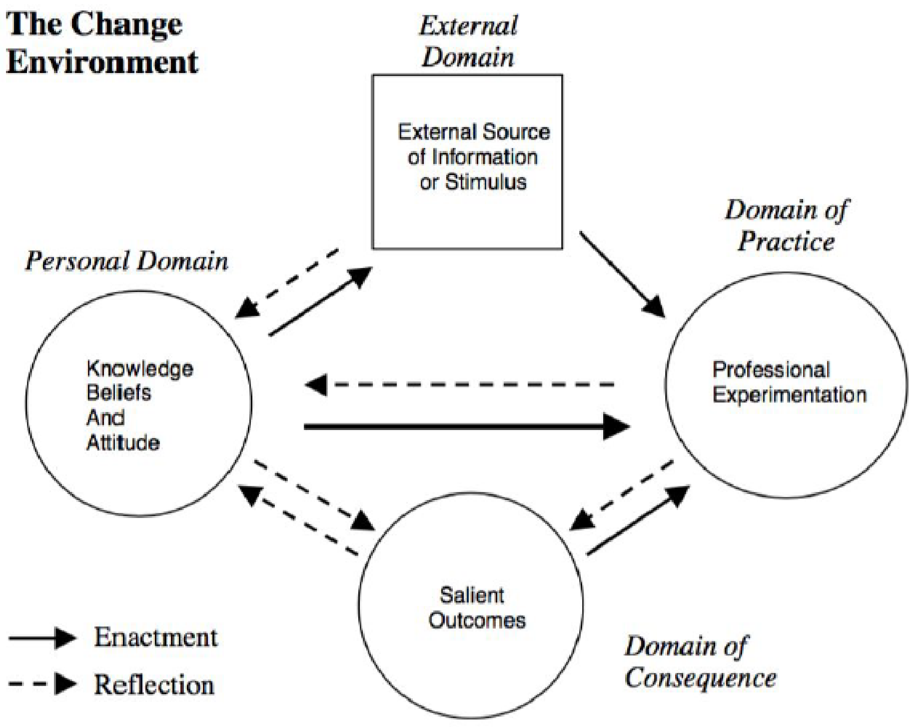

Fig. 3. The interconnected model of professional growth.

Den här typen av modell ligger till grund för matematiklyftet (Boesen, Helenius & Johansson, 2014). Utvärderingar av matematiklyftet har visat att lärare mycket riktigt ändrar sin praktik (Österholm m. fl., 2016) så i den här meningen verkar Matematiklyftet ha fungerat. Till Matematiklyftet finns inga speciella utvärderingar av elevernas kunskapsutveckling kopplade. Men när man har försökt att studera detta genom att använda tester på elever som gjordes av andra skäl, så blir den uppmätta effekten på elevernas kunskaper liten (Lindvall, Helenius, & Wiberg, 2018) eller obefintlig (Lindvall, Helenius, Eriksson & Ryve, submitted). Det här går i linje med internationell forskning på storskaliga kompetensutvecklingsinsatser. Även insatser som är i linje med det som i internationell forskning lyfts fram som centrala faktorer för högkvalitativ kompetensutveckling ger varierande eller icke-existerande effekter på elevnivå (Garet, Heppen, Walters, Smith, & Yang, 2016; Jacob, Hill, & Corey, 2017; Kennedy, 2016). När de här resultaten analyseras är en av slutsatserna att programmen kanske försöker att behandla allt för avancerade typer av undervisning, som är allt för svåra för de flesta lärare att förstå och genomföra. Ett argument från kompetensutvecklingsforskningen är att kompetensutveckling kanske måste fokusera på mer ytliga förändringar av undervisning, förändringar som är enklare att genomföra och som därför kan få större genomslag (Kazemi & Hubbard, 2008; Santagata, 2009).

I SKL-satsningen har vi tänkt på ett helt annat sätt. Istället för att sikta in oss enkla och ytliga förändringar av undervisningen bygger vi på en tämligen avancerad undervisningsmodell som skiljer sig i grunden från den typiska undervisningen som vi ser på lågstadiet. Skillnaden från typiska kompetensutvecklingsinsatser är dock att vi beskriver denna undervisning och hur lärare ska genomföra den mycket detaljerat. Istället för att ge några enstaka exempel på undervisningsaktiviteter som vi ber lärare att genomföra och reflektera runt, så levererar vi ett fullskaligt undervisningsupplägg som beskrivs i stor detalj i en lärarhandledning. Dessa undervisningssekvenser är fyra-fem veckor långa och bygger både på en noggrann analys av det innehåll som ska undervisas och på en specifik modell för undervisning (se vidare nedan). I annan kompetensutveckling är det vanligt att lärarna får vissa exempel på aktiviteter och utbildningsmomentet går ut på att förstå dessa exempel och sedan planera och genomföra egen undervisning av likartat slag. I föreliggande modell har istället vi som designar undervisningsupplägget gått så långt som det är möjligt i att planera alla undervisningsaktiviteter på förhand. Några av de allra viktigaste aspekterna av undervisning handlar dock om att tolka hur eleverna uppfattar undervisningens innehåll, ta hand om och bygga vidare på elevernas uppfattningar. Detta viktiga moment kan endast hanteras av läraren som faktiskt undervisar. Det får lärarna som deltar fokusera på i kompetensutvecklingens kollegiala moment tillsammans med andra lärare som undervisar exakt samma sak. Det vi gör i SKL-projektet är därför att följa en rekommendation av Grossmand och McDonald (2008). De observerade att både utbildning och fortbildning av lärare innehöll två komponenter *undersökandepraktiker* och *agerandepraktiker* . Här är det alltså olika praktiker inom fort- eller utbildningen de pratar om, inte lärares praktiska arbete i skolan. De två praktikerna relaterar till två aspekter av professionalism. Undersökandepraktiker har att göra med att lärare på olika sätt studerar sin och andras praktik med målet att få ökad kunskap om den som de sedan, förhoppningsvis, kan översätta till praktiskt agerande, genom att t ex planera bättre aktiviteter eller ta bättre beslut i sin undervisning. Agerandepraktiker har att göra med att de facto kunna utföra undervisning och andra aspekter av yrket på ett ändamålsenligt sätt. Grossman och McDonald observerade att under en lång rad av år har både utbildning och fortbildning av lärare glidit mot ett minskat fokus på agerandepraktiker (hur man gör) till ett ökat fokus på undersökandepraktiker (vad man ska veta eller förstå). De efterfrågar ett skifta tillbaka mot att också ta agerande på allvar. Man kan säga att SKL-projektet är ett slags svar på deras uppmaning genom att bygga kompetensutvecklingen runt en specifik undervisningsmodell.

En undervisningsmodell

Den undervisningsmodell som projektet vilar på designades från början för förskoleklass och modellen finns nu presenterad i boken Tänka, räkna och resonera i förskoleklass (Sterner, Wallby & Helenius, 2014). Modellen bygger på en strukturerad sekvens av aktiviteter som är konstruerad för att ge elever upprepade erfarenheter av de viktigaste begreppen inom den grundläggande taluppfattningen. För varje aktivitet arbetar klassen i sex olika faser varav fyra sker i helklass, en i par och en individuellt. Modellen provades ut i ett randomiserat kontrollerat försök. Det innebär att lärare slumpades till att antingen använda den av oss framtagna undervisningen eller sin ordinarie undervisning. Elevernas matematikkunskaper testades före och efter försöket och även i ett uppföljande test 6 månader senare. På så sätt kunde vi konstatera att de elever som fick den av oss designade undervisningen förbättrade sina kunskaper signifikant mer än jämförelsegruppen. Effekten motsvarade 0.8 standardavvikelser, vilket i dessa sammanhang är en stor effekt. Den kvarvarande effekten efter 6 månader var också den stor och motsvarade 0.7 standardavvikelser (Sterner, Wolff & Helenius, submitted; Sterner & Helenius, 2014). Undervisningsdesignen bygger på en genomgång av forskning om effektiv undervisning ut tar framför allt sin utgångspunkt i tre principer.

För det första bygger den på så kallad explicit undervisning (explicit instruction) som in forskningsöversikter har visat sig ge bra resultat (Gersten m fl., 2009). Explicit undervisning innebär att undervisningsdesignen är mycket tydligt beskriven men också att innehåller läraren går igenom på förhand ger tydliga beskrivningar av lösningsmodeller för de uppgifter som eleverna ska arbeta med. Vi har ersatt denna komponent med en mer problemlösande inriktning, men håller oss till att materialet fortfarande beskriver mycket exakt vad varje aktivitet handlar om, vad eleverna förväntas göra och hur läraren kan leda arbetet för att se till att alla elever kan få de erfarenheter som aktiviteten är designad för (Sterner & Helenius, 2014).

För det andra bygger undervisningen på att alla problem introduceras med hjälp av konkret material, att eleverna sedan arbetar med att representera problemets
Utgångspunkten för denna modell kommer från Witzel, Mercer och Millers (2003)
CRA-design (concrete-representational-abstract) som har testats praktiskt i undervisningsförsök av bland annat Clark och kollegor (Clarke m. fl., 2011). För de yngre eleverna handlar representationsfasen huvudsakligen om att eleverna ritar bilder av det de har arbetar med, t ex ritar fyra fyrkanter för att representera fyra klossar, eller ritar 4 streck för att representera 4 klossar. För de äldre barnen arbetar vi mer med specifika ikoniska representationer som är specifikt valda för att de mönster som kan identifieras i representationerna motsvarar sådana strukturer som finns i de matematiska begrepp som vi vill illustrera (Mulligan & Mitchelmore, 2009).

För det tredje är en mycket viktig komponent av vår undervisningsdesign att elever får resonera om sina arbeten med andra elever under lärarens systematiska ledning. Att resonemang kan ha positiva effekter på elevernas matematikkunskaper har bland annat visats i en studie av Nunes m fl (2007). I vår implementering finns för varje aktivitet en fas där eleverna resonerar om sitt arbete med problemet med tillgång till det konkreta material som uppgiften är formulerad i. Dessutom finns en fas där eleverna istället resonerar med utgångspunkt från sina dokumentationer/representationer, utan tillgång till de konkreta materialet (Sterner & Helenius, 2014).

Det matematiska innehållets struktur
Det matematiska innehåll som vi behandlar är det som Vergnaud (2009) kallar för begreppsliga fält (conceptual fields). Även om matematiken kan beskrivas som hierarkiska strukturer så kan inte vår förståelse för matematik ordnas på ett sådant strikt strukturerat sätt. I sin psykologiska snarare än logiska form finns matematiska begrepp alltid i komplexa nätverk av andra begrepp, metoder och teorier. Vi har har valt att tänka på området taluppfattning i termer av tre sammanlänkade begreppsliga fält. Tal, additiva strukturer och multiplikativa strukturer. Som ett paraply över dessa specifika matematiska områden finns också ett fokus på mönster och struktur (Mulligan & Mitchelmore, 2009). Undervisningsmoduler för förskoleklass, och årskurserna 1-3 berör alla tre av dessa områden men i förskoleklass är det huvudsakliga fokuset tal och additiva strukturer och i årskurs 3 är det huvudsakliga fokuset additiva och i ännu högre grad multiplikativa strukturer.

Tal. Vårt sätt att behandla området tal är en vidareutveckling av de fyra metaforer för tal som har uppmärksammats av Lakoff och Nunez (2000). Inom denna teori introduceras tal inte bara som antal (objekt i en mängd) utan tre andra klasser av konkreta situationer tas också som grund för att bygga talbegreppet. Detta är att tal är rörelse längs en väg. Det är via denna metafor som tal kan uppfattas att komma före eller efter varandra och att tallinjen har en riktning. Vidare är tal konstruktion och dekonstruktion. Fem kan dekomponeras i två och tre och två och de kan omgrupperas till ett och fyra. Den sista metaforen är att tal är längdsegment. Det är det här som kopplar tal till mätning och rent allmänt till sådana intuitioner om rum och avstånd som redan små barn har. Genom att systematiskt använda oss av tallinjen så kan vi koppla alla dessa metaforer för tal till varandra och därmed skapa en starkt och flexibel taluppfattning. Även inom den kognitiva neurovetenskpen har synen på taluppfattningens kognitiva grunder har skiftat från att se enbart diskreta kvantiteter (antal och ordningsföljder) som grundläggande till att även inkludera uppfattning av kontinuerliga kvantiteter som t ex längder (Ansari, 2019; Gebius et.al 2016; Leibovich & Ansari, 2016)

Additiva strukturer. Det konceptuella fältet additiva strukturer innehåller också subtraktion. Vårt sätt att behandla additiva strukturer bygger dels på en analys av vilka konkreta situationer som ligger till grund för idéerna addition och subtraktion som att lägga ihop, lägga till, dra ifrån, jämföra etc samt på ett systematiskt användande av ikoniska representationer som klossar, streck, fingrar, linjer etc som kan illustrera additiva strukturer också också manipuleras additivt. Vår behandling av additiva strukturer bygger också in hög grad på hur vi har begreppsliggjort tal (Thompson, 1993; Vergnaud, 1982)

Multiplikativa strukturer. Sättet som vi behandlar multiplikation på är kanske det som i förstone framstår som mest radikalt. Traditionellt introduceras multiplikation som upprepad addition. Detta är totalt dominerande, trots att en mycket stor mängd forskning visar att det senare leder till problem för elevens möjligheter att förstå multiplikation. (Van Dooren m fl, 2010; Vamvakoussi, 2013). Naturligtvis behöver man använda additiva idéer när man beräknar vissa multiplikationer, men arbetar vi istället med att inledningsvis beskriva multiplikation med tvådimensionella rektangelmodeller. Det gör att vi nästan direkt (i åk 2) kan hantera även multiplikation av enkla bråk och introducera eleverna till att arbeta med proportionella resonemang. Sätter vi behandlar multiplikation på vilar på en stor mängd forskning men är kanske bäst sammanfattat av Thompson och Saldanha (2003) samt av oss själva (Säfström, Helenius & Ahl, 2019).

Referenser

Ansari, D. (2019). Development of Number Understanding: Different Theoretical Perspectives. In *International Handbook of Mathematical Learning Difficulties* (pp. 91-104). Springer, Cham.

Boesen, J., Helenius, O., & Johansson, B. (2015). National-scale professional development in Sweden: theory, policy, practice. *ZDM, 47* (1), 129-141.

Clarke, D., & Hollingsworth, H. (2002). Elaborating a model of teacher professional growth. *Teaching and teacher education* , 18(8), 947-967.

Clarke, B., Smolkowski, K., Baker, S., Fien, H., and Chard, D. (2011). The Impact of a comprehensive tier 1 kindergarten curriculum on the achievement of students at-risk in mathematics. *The Elementary School Journal, 111* (4), 561–584. DOI:10.1086/659033

Dooren, W. V., Bock, D. D., & Verschaffel, L. (2010). From addition to multiplication… and back: The development of students' additive and multiplicative reasoning skills. *Cognition and Instruction, 28* (3), 360-381.

Garet, M. S., Heppen, J., Walters, K., Smith, T., & Yang, R. (2016). *Does content-focused teacher professional development work? Findings from three Institute of Education Sciences studies.* Retrieved from the Institute of Education Sciences.

Gebuis, T., Kadosh, R. C., & Gevers, W. (2016). Sensory-integration system rather than approximate number system underlies numerosity processing: A critical review. *Acta psychologica, 171* , 17-35.

Gersten, R., Chard. J. C., Jayanthi, M., Baker, S., Morphy, P. & Flojo, J. (2009). Mathematics instruction for students with learning disabilities: A Meta-analysis of instructional components. *Review of Educational Research, 79* , 1202–1242.

Grossman, P., & McDonald, M. (2008). Back to the future: Directions for research in teaching and teacher education. *American Educational Research Journal, 45* , 184–205.

Jacob, R., Hill, H., & Corey, D. (2017). The impact of a professional development program on teachers' mathematical knowledge for teaching, instruction and student. *Journal of Research on Educational Effectiveness* , 10(2). 379-407.

Kazemi, E., & Hubbard, A. (2008). New directions for the design and study of professional development: Attending to the coevolution of teachers' participation across contexts. *Journal of Teacher Education, 59* (5), 428-441.

Kennedy, M. M. (2016). How does professional development improve teaching? *Review of Educational Research, 86* (4), 945-980.

Lakoff, G., & Núñez, R. E. (2000). *Where mathematics comes from: How the embodied mind brings mathematics into being.* New York, NY: Basic Books.

Leibovich, T., & Ansari, D. (2016). The symbol-grounding problem in numerical cognition: A review of theory, evidence, and outstanding questions. *Canadian Journal of Experimental Psychology/Revue canadienne de psychologie expérimentale, 70(* 1), 12.

Lindvall, J., Helenius, O., & Wiberg, M. (2018). Critical features of professional development programs: Comparing content focus and impact of two large-scale programs. *Teaching and Teacher Education, 70* , 121-131.

Lindvall, J., Helenius, O., Eriksson, K & Ryve, A. (submitted). *Assessing the Impact of a National-scale Professional Development Program for Mathematics Teachers.*

Mulligan, J. T., & Mitchelmore, M. C. (2013). Early awareness of mathematical pattern and structure. In L.D. English & J. T. Mulligan (Eds). *Reconceptualizing early mathematics learning* (pp. 29–45). Dordrecht, The Netherlands: Springer.

Nunes, T. Bryant, P., Evans, D., Bell, D., Gardner, S. et al. (2007). The contribution of logical reasoning to the learning of mathematics in primary school. *British Journal of Developmental Psychology, 25* (1), 147–166.

Santagata, R. (2009). Designing video-based professional development for mathematics teachers in low-performing schools. *Journal of Teacher Education, 60* (1), 38-51.

Sterner, G., Helenius, O., & Wallby, K. (2014). *Tänka, resonera och räkna i förskoleklassen* . Göteborg: Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM).
Sterner, G., & Helenius, O. (2015). Number by reasoning and representations–the design and theory of an intervention program for preschool class in Sweden. In *Development of Mathematics Teaching: Design, Scale, Effects* , 159–168.
Sterner, G., Wolff, U. & Helenius, O. (submitted). *Reasoning about Representations: Effects of an Early Math Intervention* .
Säfström, A. I., Helenius, O., & Ahl, L. M. (2019). *Implementing alternative models for introducing multiplication.* Paper presented at CERME 11, Utrecht 2019.
Thompson, P. W. (1993). Quantitative reasoning, complexity, and additive structures. *Educational studies in Mathematics, 25* (3), 165-208.
Thompson, P. W., & Saldanha, L. (2003). Fractions and multiplicative reasoning. In J. Kilpatrick, G. Martin & D. Schifter (Eds.), *Research companion to the principles and standards for school mathematics* (pp. 95–113). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
Vamvakoussi, X., Van Dooren, W., & Verschaffel, L. (2013). Brief Report. Educated adults are still affected by intuitions about the effect of arithmetical operations: evidence from a reaction-time study. *Educational Studies in Mathematics, 82* (2), 323-330.
Vergnaud, G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and subtraction problems. Addition and subtraction: A cognitive perspective, 39-59.
Vergnaud, G. (2009). The theory of conceptual fields. *Human development, 52* (2), 83-94.
Witzel, B. S., Mercer, C. D., & Miller, M. D. (2003). Teaching algebra to students with learning difficulties: An investigation of an explicit instruction model. *Learning DisabilitiesResearch & Practice, 18* (2), 121–131.
Österholm, M., Bergqvist, T., Liljekvist, Y., & van Bommel, J. (2016). *Utvärdering av matematiklyftet resultat: Slutrapport* .